2.14 Étude de $\mathcal{O}(p,q)$

Soit f une forme quadratique réelle de signature (p,q). On note $\mathcal{O}(p,q)$ son groupe des isométries.

Théorème : $\mathcal{O}(p,q) \underset{\text{homéo}}{\sim} \mathcal{O}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$

Lemme : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \underset{\text{homéo}}{\sim} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ via exp

Démonstration : (du lemme)

- Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ notée $S = {}^tP \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (via le théorème spectral)

Alors $\mathbf{e}^S = {}^tP \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\exp(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Par restriction, l'application reste bien $\mathscr{C}^0$.

- Soit $(A, A') \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ avec $\mathbf{e}^A = \mathbf{e}^{A'}$

Soit Q un interpolateur de Lagrange tel que $Q(\mathbf{e}^{\lambda_i}) = \lambda_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$
A' commute à $Q\left(\mathbf{e}^{A'}\right) = Q\left(\mathbf{e}^{A}\right) = A$ donc A commute à A', d'où par diagonalisation simultanée : $A' = A$
L'application est bien injective.

- Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ notée $B = {}^tP \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P$ où $\mu_i > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ (théorème spectral)

$A = {}^tP \begin{pmatrix} \ln(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \ln(\mu_n) \end{pmatrix} P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{e}^A = B$ d'où la surjectivité.

- Soit $(B_k)_k = \left(\mathbf{e}^{A_k}\right)_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ avec $B_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B = \mathbf{e}^A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Montrons que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A$ pour conclure.
La suite $(B_k)_k$ est convergente donc bornée, pour $\|\bullet\|_2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par continuité de $B \mapsto B^{-1}$, on en déduit que $\left(B_k^{-1}\right)_k$ est aussi bornée pour $\|\bullet\|_2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ on a : $\|M\|_2 = \rho(M) = \max\{\mathrm{Sp}(M)\}$ donc tous les $\mathrm{Sp}(B_k)$ sont majorés par un $C > 0$, et de façon analogue, les $\mathrm{Sp}(B_k^{-1})$ sont minorés par un $C' > 0$. On en déduit que toutes les valeurs propres des B_p sont dans $[C', C] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et donc les $\ln(\lambda_{B_p}) = \lambda_{A_p}$ sont dans $[\ln(C'), \ln(C)]$ par croissance de ln.
La suite $(A_k)_k$ est donc bornée, et admet A comme valeur d'adhérence. Montrons que c'est la seule.
Supposons qu'on ait $(A_{p_k})_k$ qui CV vers $\tilde{A}$. Pour tout k, $\mathbf{e}^{A_{p_k}} = B_{p_k}$ donc par passage à la limite (possible par continuité) : $\mathbf{e}^{\tilde{A}} = B = \mathbf{e}^A$ et donc $A = \tilde{A}$ par injectivité. On peut donc conclure.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, une suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence converge vers celle-ci.

Démonstration : du théorème
Notons $J = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$. Remarquons que $J^{-1} = J$. Soit $M \in \mathcal{O}(p,q)$.
Par décomposition polaire : $M = \Omega S$ où $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1) Montrons que S et Ω sont dans $\mathcal{O}(p,q)$
- $M \in \mathcal{O}(p,q) \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n \ : \ {}^tXJX = {}^t(MX)J(MX) \Leftrightarrow J = {}^tMJM$ donc $MJ{}^tM = J : {}^tM \in \mathcal{O}(p,q)$.

Donc : $\underbrace{{}^tMM}_{\in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \in \mathcal{O}(p,q)$. On la note S^2 pour la suite.

- Comme $S^2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $S^2 = \mathbf{e}^T$ où $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (via le lemme)

$$S^2 \in \mathcal{O}(p,q) \Leftrightarrow J = {}^t(\mathbf{e}^T) J \, \mathbf{e}^T \Leftrightarrow J = \mathbf{e}^t \, J \, \mathbf{e}^T \Leftrightarrow \mathbf{e}^T = J \, \mathbf{e}^{-T} \, J^{-1} = \mathbf{e}^{-TJT}$$

Par l'homéomorphisme, on en déduit que $T = -JTJ$, et les mêmes calculs "remontés" prouvent que $\frac{T}{2} = -J\frac{T}{2}J$ et donc $S = \mathbf{e}^{T/2} \in \mathcal{O}(p,q)$

- $\Omega = MS^{-1} \in \mathcal{O}(p,q)$ (c'est un groupe !)

2) Description de $\mathcal{O}(p,q)$
On a donc un homéomorphisme noté Ψ donné par : $\mathcal{O}(p,q) \underset{\text{homéo}}{\sim} \underbrace{(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(p,q))}_{O_1} \times \underbrace{(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{O}(p,q))}_{O_2}$

- Soit $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \in O_1 \ : \ \begin{cases} {}^tPP = \mathrm{I}_n \\ J = {}^tPJP \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_2 = P_3 = 0 \\ {}^tP_1P_1 = \mathrm{I}_p \\ {}^tP_4P_4 = \mathrm{I}_q \end{cases}$ ie $(P_1, P_4) \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_q(\mathbb{R})$

- Soit $Q \in O_2 \underset{\text{homéo}}{\sim} \exp(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{O}(p,q)$ via le lemme. Notons alors $Q = \mathbf{e}^T$ où $\underbrace{T}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} = -JTJ$

Notons $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ {}^tT_2 & T_4 \end{pmatrix}$. On calcule : $-JTJ = \begin{pmatrix} -T_1 & T_2 \\ {}^tT_2 & -T_4 \end{pmatrix}$ donc $T_1 = T_4 = 0$, et finalement, :
$T = \begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ {}^tT_2 & 0 \end{pmatrix}$ où $T_2 \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \underset{\text{isom}}{\sim} \mathbb{R}^{pq}$, ce qui conclut la preuve.

Application : Topologie du groupe $\mathcal{O}(p,q)$
- Il est compact ssi $p = 0$ ou $q = 0$, et possède alors 2 composantes connexes
- Il n'est pas compact si p, q sont $\neq 0$, et il possède (via det) 4 composantes connexes.

Référence :
- Caldero-Germoni ; *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie , Tome I* ; page 360-361