148 EXEMPLES DE DÉCOMPOSITIONS DE MATRICES. APPLICATIONS.

Dans ce qui suit, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - DÉCOMPOSITIONS EN LIEN AVEC LA RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES

a) Décomposition de Dunford

[MN] **Prop 1 :** [Lemme des noyaux]
Soit $P = P_1 \dots P_s \in \mathbb{K}[X]$, les P_i étant deux à deux premiers entre eux. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\operatorname{Ker}(P)(u) = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} P_i(u)$. De plus, pour tout i, le projecteur de $\operatorname{Ker}(P)(u)$ sur $\operatorname{Ker} P_i(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \operatorname{Ker} P_j(u)$ est un polynôme en u.

[G] **Thm 2 :** [décomposition de Dunford]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que le polynôme caractéristique $\det(XI_n - M)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple de matrices $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que :
- $M = D + N$;
- D est diagonalisable ;
- $DN = ND$;
- N est nilpotente.

De plus, D et N sont des polynômes en M.

[MN] **Exemples 3 :**
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[CG]
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[CG] **Rem 4 :**
- Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme non nul est scindé, et il existe ainsi toujours une décomposition de Dunford.
- Sur $\mathbb{R}$, on peut effectuer une décomposition de Dunford sur M vue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: on obtient $(D, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, mais D diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

[CG] **Rem 5 :** L'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe D ou N de sa décomposition de Dunford n'est pas continue.

[CG] **Algo 6 :** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de polynôme caractéristique χ_M et de décomposition de Dunford $M = D + N$. On pose $P := \dfrac{\chi_M}{\chi_M \wedge \chi_M'} = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)} (X - \lambda)$.
La suite de matrices $(A_r)_{r \in \mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{r+1} = A_r - P(A_r)\, P'(A_r)^{-1} & \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

est bien définie, stationnaire et tend vers D.
Cet algorithme a une complexité en $O(n^4 \log(n))$.

[R] **Application 7 :** On note $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{M^k}{k!}$ l'exponentielle de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Comme D et N commutent, la décomposition de Dunford de M donne :
$\exp(M) = \exp(D)\exp(N) = \exp(N)\exp(D)$
La décomposition de Dunford de $\exp(M)$ est alors
$\exp(M) = \exp(D) + \exp(D)\left(\exp(N) - I_n\right)$.

[LR] **Corollaire 8 :** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors M est diagonalisable si et seulement si $\exp(M)$ est diagonalisable.

[MM] **Application 9 :** Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

[MM] **Application 10 :** $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$; $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{R^2 \mid R \in GL_n(\mathbb{R})\}$

[MM] **Application 11 :** Résolution de systèmes différentiels linéaires du premier ordre $Y'(t) = A.Y(t)$.

b) Décomposition de Jordan des matrices nilpotentes

[MM] **Lemme 12 :** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La suite des noyaux itérés $(\operatorname{Ker} u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion puis stationnaire, et s'essouffle dans le sens où $(\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} - \dim \operatorname{Ker} u^k)$ est décroissante.

[CG] **Def 13 :** Une partition de n est une suite d'entiers naturels $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ décroissante, nulle à partir d'un certain rang $m+1$, et dont la somme des termes vaut n.

[MM] **Defs 14 :** Le bloc de Jordan de taille $m \geq 1$ J_m est la matrice de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont nuls sauf sur la 1e sur-diagonale où ils valent 1. ANNEXE

- À une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, on associe la matrice de Jordan J_λ diagonale par blocs, de blocs $J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_m}$.

[CG] **Thm 15 :** [décomposition de Jordan, cas nilpotent]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Alors, il existe une unique partition λ de n telle que M soit semblable à la matrice J_λ.

[BMP] **Exemple 16 :** $\begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$ ne sont pas semblables, bien que de même rang.

On peut lire les classes de similitude de matrices nilpotentes à l'aide des tableaux de Young.

[MM] **Defs 17 :** Le tableau de Young associé à la partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est un tableau à r lignes dont la i^e ligne comporte λ_i colonnes, noté $TY(\lambda)$.
Le tableau de Young conjugué à $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est un tableau à r colonnes, dont la i^e colonne comporte λ_i lignes, noté $TY^*(\lambda)$.
Le tableau de Young associé à une matrice nilpotente $M \sim J_\lambda$ est le tableau de Young associé à la partition λ, ou de manière équivalente $TY^*(\mu)$, où μ est la suite des valeurs de $(\dim \ker M^{k+1} - \dim \ker M^k)_{k \geq 0}$.

[MM] **Exemples 18 :** En ANNEXE est présenté le tableau de Young d'une matrice nilpotente d'indice de nilpotence maximale. Est aussi représenté le tableau de Young d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$ vérifiant $(\dim \ker M^k)_{k \geq 0} = (7, 12, 14, 16, 17, \dots)$.

ANNEXE

Rem 19 : Deux matrices nilpotentes sont semblables ssi elles admettent même tableau de Young.

[MM] **Application 20 :** On peut ainsi lire les dimensions des noyaux et images de M^k pour tout $k \geq n$.

ANNEXE

○ Une application : le critère de diagonalisabilité de Kolchin

[MM] **Def 21 :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit l'adjoint de A par $ad_A : M \mapsto AM - MA$.

Lemme 22 : Si A est diagonalisable (resp. nilpotent), alors ad_A est diagonalisable (resp. nilpotent).

Prop 23 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ad_A est diagonalisable. Alors A est diagonalisable.

Thm 24 : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.
u est diagonalisable si et seulement si : $\ker ad_u = \ker ad_u^2$. DEV 1

II _ DIVISER POUR RÉGNER : LA DÉCOMPOSITION POLAIRE

[CG]

Thm 25 : [décomposition polaire sur $\mathbb{R}$]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.
De plus, si M est inversible, le couple (O, S) est unique, et l'application
$\begin{cases} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{cases}$ est un homéomorphisme. DEV 2

Corollaire 26 : Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(\,{}^tAA)}$, où ρ désigne le rayon spectral.

Corollaire 27 : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Thm 28 : [décomposition polaire sur $\mathbb{C}$]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe (U, H) avec U unitaire et H hermitienne positive telle que $M = UH$. De plus, si M est inversible, le couple (U, H) est unique, et l'application $\begin{cases} \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ (U, H) & \longmapsto & UH \end{cases}$
est un homéomorphisme.

Exemple 29 : Pour $n = 1$, on retrouve l'écriture $z = \rho e^{i\theta}$, unique pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Application 30 : $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

III - DÉCOMPOSITIONS LIÉES À LA RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

a) Décomposition LU

[CP] Ici, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, même fini.

Thm 31 : Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors il existe P matrice de permutation, L matrice triangulaire inférieure unipotente et U matrice triangulaire supérieure telle que $M = PLU$.
Si les mineurs principaux de M sont tous non nuls, alors $P = I_n$, et la décomposition $M = LU$ est unique.

[C] **Rem 32 :** La décomposition LU s'obtient simplement par la méthode du pivot de Gauss. Ainsi, la décomposition LU d'une matrice de taille $n \times n$ s'obtient en $O(n^3)$ opérations.

[C] **Application 33 :** Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ admettant une décomposition LU, et $B \in \mathbb{K}^n$. Le système linéaire $AX = B$ équivaut à $LUX = B$. Si on connait la décomposition LU de A on peut résoudre $LY = B$ puis $UX = Y$ rapidement par méthode de remontée.

[C] [CP] **Corollaire 34 :** Le calcul du déterminant, de l'inverse de A ou d'une solution de $AX = B$ s'effectuant en $O(n^3)$ opérations sur $\mathbb{K}$.

[CP] **Application 35 :** Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$, il y a $(q-1)^n q^{n(n-1)}$ matrices dont les mineurs principaux sont tous non nuls.

b) Décomposition QR

[C] **Thm 36 :** Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (Q, R), avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs tels que $M = QR$.

Rem 37 : La décomposition QR peut s'obtenir avec la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, appliquée à la famille de colonnes de M. [C]

Application 38 : Le système linéaire $AX = B$ équivaut à $QRX = B$, ie. $RX = {}^tQB$, ce qui donne un système échelonné. [C]

La décomposition QR permet, sous certaines hypothèses, d'approcher les valeurs propres d'une matrice.

Algorithme 39 : [méthode QR] [C]
On pose $A_0 = A$, $A_k = Q_k R_k$ par la décomposition QR, et on définit par récurrence $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Thm 40 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont de module tous distincts. [C]
On écrit $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$.
On suppose que P^{-1} admette une décomposition LU.
Alors $\lim_{k \to \infty} (A_k)_{i,i} = \lambda_i$, $\lim_{k \to +\infty} (A_k)_{i,j} = 0 \quad \forall j < i$.

c) Décomposition d'Hermite

Prop 41 : Soit $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{Z}^n$, $d = \mathrm{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$. Il existe $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ tels que $M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. [NQ]

Thm 42 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Il existe $L \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que LA soit échelonnée sur les lignes. [NQ]

Thm 43 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Il existe une unique matrice échelonnée réduite H de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, et $G \in GL_n(\mathbb{Z})$ telles que $A = GH$. La matrice H s'appelle la forme normale d'Hermite de A. [Cohen]

Remarque 44 : G n'est pas unique.

Application 45 : Résolution de systèmes diophantiens linéaires. [C dd]

ANNEXE 1 : définition 14

$$J_1 = [0] \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

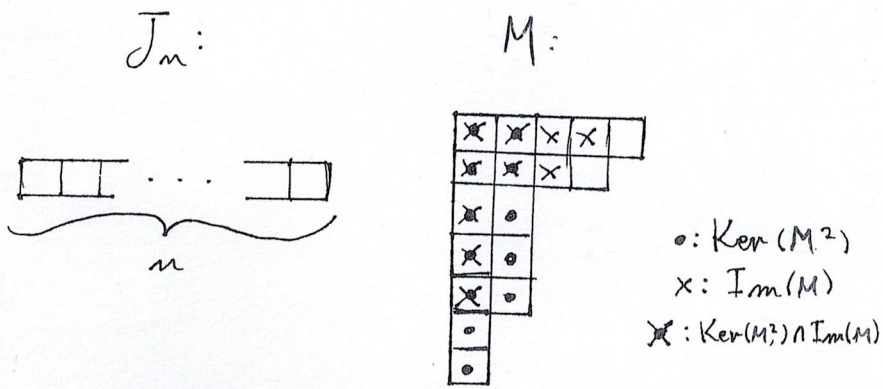

Figure 2 : Tableaux de Young de nilpotents

Références :

- [C] P. CIARLET, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Dunod.
- [CP] P. CALDÉRO, M. PERONNIER, Carnet de voyage en Algébrie, Calvage & Mounet
- [CG] P. CALDÉRO, J. GERMONI, Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome premier, Calvage & Mounet
- [BMP] V. BECK, J. MALICK, G. PEYRÉ, Objectif Agrégation, 2e édition, H & K.
- [Cohen] H. COHEN, A Course in Computational Algebraic Number Theory, Springer.
- [C et al.] A. CASAMAYOU, N. COHEN, G. CONNAN, T. DUMONT, F. MALTEY, M. MEULIEN, M. MEZZAROBBA, C. PERNET, N.M. THIÉRY, P. ZIMMERMANN, Calcul mathématique avec SAGE, auto-édité.
- [G] T. GOURDON, Les maths en tête, Algèbre, Ellipses.
- [MM] R. MANSUY, R. MNEIMNÉ, Algèbre linéaire – Réduction des endomorphismes, 3e édition, Deboeck Supérieur.
- [NQ] P. NAUDIN, C. QUITTÉ, Algorithmique algébrique, Masson
- [R] J.E. ROMBALDI, Mathématiques pour l'agrégation – Algèbre et géométrie, Deboeck supérieur.