Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient E, F $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

I) Théorie de la dimension, généralités

1) Familles génératrices, libres et bases [Berhuy]

Déf 1 : Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est libre si pour tout sous-ensemble $J \subset I$ fini, et pour toute famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on a $\sum_{j\in J} \lambda_j e_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$.
- Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Déf 2 : Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice si $\mathrm{Vect}(e_i, i\in I) = E$, autrement dit si pour tout $x \in E$, il existe $J \subset I$ fini et une famille $(\lambda_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j$

Déf 3 : Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice. Cela revient à dire que tout $x \in E$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j$ où $J \subset I$ fini.

Thm 4 : (Théorème de la base incomplète) Soit G une famille génératrice de E. Alors toute famille libre L de E contenue dans G peut être complétée en une base de E formée d'éléments de G. En particulier, toute famille libre de E peut être complétée en une base, et tout $\mathbb{K}$-ev admet au moins une base.

Thm 5 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) L'application u est injective (resp. surjective, bijective)
(ii) Pour toute base $(e_i)_{i\in I}$, la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est libre (resp. génératrice, resp. bijective).
(iii) Il existe une base $(e_i)_{i\in I}$ telle que la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est libre (resp. génératrice, resp. une base).

Ex 6 : La famille $(e_i)_{1\le i\le m}$ où $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ est une base de $\mathbb{K}^m$, appelée base canonique de $\mathbb{K}^m$.

2) Notion de dimension [Berhuy]

Thm 7 : Supposons que E admette une famille génératrice finie. Alors toutes les bases de E sont finies, et ont le même nombre d'éléments, disons m. De plus, pour toute famille libre $\mathcal{L}$ et toute famille génératrice $\mathcal{G}$, on a
$$|\mathcal{L}| \le m \le |\mathcal{G}| \quad \text{où } |A| = \mathrm{card}(A)).$$

Déf 8 : E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de E. Dans ce cas, $\dim_{\mathbb{K}}(E) :=$ cardinal d'une base de E.

Thm 9 : Soient $E, E_1, \dots, E_m, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors :
(1) On a $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m) = m$ pour tout $m \ge 1$
(2) Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = m$ alors $E \simeq \mathbb{K}^m$
(3) Deux $\mathbb{K}$-ev sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension
(4) Pour tout sous-espace vectoriel E' de E, E' est de dimension finie et on a $\dim_{\mathbb{K}}(E') \le \dim_{\mathbb{K}}(E)$. De plus on a égalité si et seulement si $E' = E$.
(5) Le $\mathbb{K}$-ev $E_1 \times \dots \times E_m$ est de dimension finie et l'on a $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times \dots \times E_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim_{\mathbb{K}}(E_i)$
(6) Le $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et l'on a $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}(E, F)) = \dim_{\mathbb{K}}(E)\dim_{\mathbb{K}}(F)$

Thm 10 : (Théorème du rang) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ (avec E et F de dimension finie), on a :
$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\ker(u)) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(u))$$

Coro 11 : Avec les notations du théorème 10, en supposant de plus $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ on a les équivalences :
u injective $\Leftrightarrow$ u surjective $\Leftrightarrow$ u bijective.

Coro 12 : Soit E de dimension m et soit $\mathcal{E}$ une famille de m éléments. On a équivalence entre $\mathcal{E}$ libre, $\mathcal{E}$ génératrice, $\mathcal{E}$ base.

[Zavidovique]

DEV 1

3) Théorème de la base de Burnside / Théorème de Frattini

Def 13 : Soit p un nombre premier. On dit que G est un p-groupe si le cardinal de G est puissance de G (et si G est un groupe).

Def 14 : Soit G un groupe. On dit que $\mathcal{M}$ est un sous-groupe maximal de G si $\mathcal{M}$ est un sous-groupe de G et si pour tout sous-groupe H de G, on a

$$\mathcal{M} \subset H \subset G \Rightarrow \mathcal{M} = H \text{ ou } H = G$$

Def 15 : On appelle sous-groupe de Frattini de G : $F(G)$ l'intersection des sous-groupes maximaux de G.

Lemme 16 : $g \in F(G)$ si et seulement si pour toute famille génératrice $(g, g_1, \dots, g_k)$ contenant g, la famille $(g_1, \dots, g_k)$ est encore génératrice (on dit alors que g est moul).

Lemme 17 : Soit G' un groupe de cardinal m et H un sous-groupe de G d'indice p où p est le plus petit nombre premier divisant m. Alors $H \lhd G$.

Lemme 18 : Soit G un p-groupe. Les sous-groupes maximaux de G sont d'indice p.

Thm 19 (Frattini) : Soit G un p-groupe. Alors $G/F(G)$ est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-ev de dimension égale au cardinal de toute famille génératrice minimale de G.

4) Somme d'espaces vectoriels [Berhuy]

Cadre 20 : Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E

Def 21 : 1) On dit que les E_i, $i \in I$ sont en somme directe si pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, tout $x_j \in E_j$, $j \in J$, on a $\sum_{j \in J} x_j = 0 \Rightarrow x_j = 0$ (pour tout $j \in J$)

2) La somme $\sum_i E_i$ est $E_1 + \dots + E_m = \{x_1 + \dots + x_m, x_i \in E_i, 1 \le i \le m\}$ (le sev engendré par la réunion de E_i)

3) On dit que E est la somme directe des E_i, $i \in I$ si
(i) $E = \sum_{i \in I} E_i$ (ii) les E_i sont en somme directe.
- On note alors $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$

Prop 22 : Si E de dimension finie et $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$, alors $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \sum_{i=1}^{m} \dim_{\mathbb{K}}(E_i)$

Rq 23 : On obtient une base de E en recollant les bases des E_i, $i \in I$.

II) Rang [Grifone, Rombaldi]

1) Généralités (différentes caractérisations)

Def 24 : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie. On appelle rang u, noté $\mathrm{rg}\, u$, l'entier $\dim(\mathrm{Im}\, u)$.

Thm 25 : Le théorème 10 se reformule ainsi : pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\dim E = \dim \ker u + \mathrm{rg}(u)$$

Def 26 : Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est égale au rang de l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ canoniquement associé à la matrice A.

Def 27 : Soit $\mathcal{F} = \{v_i\}_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de l'espace engendré par les vecteurs $\{v_i\}_{i \in I}$

- On appelle rang d'une matrice A le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

Rq 28 : Toutes ces définitions sont cohérentes entre elles

Prop 29 : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

2) Méthodes de calcul

Prop 30 : Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est égale à la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite de A.

Méthode 31 : Pour calculer le rang d'une matrice A, il faut effectuer le pivot de Gauss, c'est-à-dire mettre la matrice sous une forme échelonnée (i.e. les lignes commencent par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente) à l'aide des opérations élémentaires :
- changer l'ordre des lignes
- multiplier une ligne par un scalaire non nul
- ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres équations

Rq 32 : La méthode du pivot peut se pratiquer sur les colonnes d'après la prop 29 (mais il ne faut pas mélanger les deux).

Ex 33 : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1$ $\quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$

3) Application aux systèmes linéaires

Def 34 : Un système linéaire de p équations à n inconnues est un système de la forme $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ l'inconnu). On appelle rang du système le rang de A.

DEV 2

Méthode 35 : Le pivot de Gauss permet de mettre un système linéaire sous forme échelonnée et de le résoudre. (*)

Application 37-3 : Soient A, B, C, D, E 5 points distincts du plan. Alors il existe une conique passant par ces 5 points. De plus cette conique est unique s'il n'existe pas parmi ces cinq points quatre points alignés

(*) Thm 36 : Si le système $AX = B$ admet une (ou des) solution(s) alors l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension $n - r$ porté par X_0 une solution de $AX = 0$.

III) Applications

1) Réduction des endomorphismes [Mansuy]

Cadre 38 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie

Prop 39 : Tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur.

Thm 40 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si f est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre correspondante (cad la multiplicité de la valeur propre dans χ_f).

Def 41 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$ (où u^* est l'adjoint de u).

Lemme 42 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si F est un sev de E stable par u alors F stable par u.

Lemme 43 : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un sev P de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Lemme 44 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe $P_1, \dots, P_r$ de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux tels que $E = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} P_i$.

Thm 45 : (Réduction des endomorphismes normaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit $\Delta = \begin{pmatrix} D_p & & 0 \\ & R_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & R_r \end{pmatrix}$ où D_p matrice diagonale d'ordre p et pour tout $k \in \{1; \dots; r\}$ $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ avec $b_k \neq 0$ et où $p, r \in \mathbb{N}$ tels que $p + 2r = n$.

2) Extension de corps [Perrin]

Def 46 : Soit $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ des corps avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. On dit que $\mathbb{L}$ est une extension de corps de $\mathbb{K}$.

Ex 47 : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$ ...

Rq 48 : 1) Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-ev.
2) Si $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ est finie, on pose $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ et l'entier $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ s'appelle le degré de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$.
3) Si $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont des corps finis, on a $|\mathbb{L}| = |\mathbb{K}|^m$ avec $m = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$

Thm 49 : (Théorème de la base télescopique)
Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ des corps, $(e_i)_{i \in I}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$, $(f_j)_{j \in J}$ une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$. Alors la famille $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{K}$.

Coro 50 : Dans le cadre du Thm 49, si les degrés sont finis, on a $[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}][\mathbb{L} : \mathbb{M}]$

(*) Lemme avant appli 37 :

Lemme 37-1 : Soient M, N deux points du plan de coordonnées barycentriques (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Alors, la droite (MN) a pour équation $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

Lemme 37-2 : Soit ABC un triangle non plat. L'équation générale en coordonnées barycentriques d'une conique passant par les points A, B, C est de la forme $pyz + qxz + rxy = 0$ où p, q, r non tous nuls.

[Eidon : Dev 2]