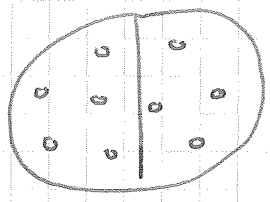
Leçons INFO. (902) DPR : exples & appli.



I] 1er dvt : $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$. $\underset{(p,q)\in\mathcal{P}}{\text{Argmin}}\ d(p,q)$?

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} <_x \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad p_1 < p_2 \text{ ou } (p_1 = p_2 \text{ et } q_1 \leq q_2)$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} <_y \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad q_1 \leq q_2$$

Initialisation. $X = \mathcal{P}$ trié selon $<_x$. $Y = \mathcal{P}$ trié selon $<_y$

DR(X,Y) :

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = p = X\left(\left\lfloor \frac{|X|}{2} \right\rfloor\right)$;

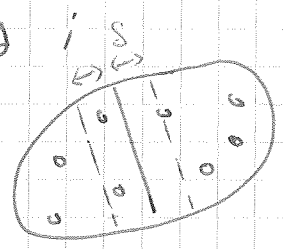
$X_g = X|_{q,\ q <_x p}$; $X_d = X \setminus X_g$;

$Y_g = Y|_{q,\ q <_{\cancel{y}\,x} p}$; $Y_d = Y \setminus Y_g$;

$(p_g, q_g) \leftarrow DR(X_g, Y_g)$;

$(p_d, q_d) \leftarrow DR(X_d, Y_d)$;

$\delta = \min(d(p_g, q_g), d(p_d, q_d))$



$B = Y|_{\binom{x}{y},\ x \in [x_n - \delta,\ x_n + \delta]}$; $p_c \leftarrow B[0]$; $q_c \leftarrow B[1]$

$\forall i \in [0, |B|-1]$ $\min(|B|-1, i+8)$

$\quad \forall j \in [i+1, \cancel{|B|-1}]$

$\quad\quad$ si $d(B[i], B[j]) \leq \delta$

$\quad\quad\quad \delta \leftarrow d(B[i], B[j])$

$\quad\quad\quad (p_c, q_c) \leftarrow B[i], B[j]$

Return (p_c, q_c)

On part du haut de la bande et on regarde avec les 8 pts srts (intérêt du tri selon y)

Améliora° :



pas plus d'un pt par carré de côté δ/2

↳ fusion linéaire ☺

Complexité $n = |X|$

Init $= O(n \log n)$

Divise $= O(n)$

Fusion $= O(|B| \times 7) = O(n)$

II. 2ème dvt : Transformée de Fourier rapide.

$A = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ $\quad n = 2^p$ (quitte à rajouter des 0 à A)

Obj : calculer $y_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \left(e^{\left(\frac{2i\pi}{n}.k\right)}\right)^2 \quad \forall k \leq n-1$

Soit $k \leq \frac{n}{2} - 1$ $\quad y_k = \sum_{j=0}^{n/2-1} a_{2j} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}.k}\right)^{2j} + \sum_{j=0}^{n/2-1} a_{2j+1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}.k}\right)^{2j+1}$

$$\begin{cases} b_j = a_{2j} \\ c_j = a_{2j+1} \end{cases}, \quad j \in [\![0, n/2 - 1]\!]$$

$$\begin{cases} \underbrace{y_k}_{\text{taille } n} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n/2-1} b_j \left(e^{2i\pi\left(\frac{2}{n}\right)k}\right)^j}_{\text{taille } n/2} + \left(e^{\frac{2i\pi}{n}.k}\right) \underbrace{\sum_{j=0}^{n/2-1} c_j \left(e^{2i\pi\left(\frac{2}{n}\right)k}\right)^j}_{\text{taille } n/2} \\ y_{k+n/2} = \sum_{j=0}^{n/2-1} b_j \left(e^{2i\pi\left(\frac{2}{n}\right)k}\right)^j - \left(e^{\frac{2i\pi}{n}.k}\right) \sum_{j=0}^{n/2-1} c_j \left(e^{2i\pi\left(\frac{2}{n}\right)k}\right)^j \end{cases}$$

$e^{\frac{2i\pi}{n} \times \frac{n}{2}}$

Rq : $\mathcal{F}(A)$:

$B = [a_0, a_2 \dots a_{n-2}]$
$C = [a_1, a_3 \dots a_{n-1}]$
$F_B = \mathcal{F}(B)$
$F_C = \mathcal{F}(C)$
Pour $k = 0 \dots n/2 - 1$
  $y_k \leftarrow F_{B,k} + e^{\frac{2i\pi}{n}.k} F_{C,k}$
  $y_{k+n/2} \leftarrow F_{B,k} - e^{\frac{2i\pi}{n}.k} F_{C,k}$

$\omega_n \leftarrow e^{2i\pi/n}$
$\omega \leftarrow 1$
$y_k \leftarrow F_{B,k} + \omega F_{C,k}$
$y_{k+n/2} \leftarrow F_{B,k} - \omega F_{C,k}$
$\omega \leftarrow \omega \times \omega_n$.

III. 3ème déc. Calcul de l'automate minimal

$p \sim q$ ssi $L_p = L_q$ (p, q états). On quotiente ensuite par cette relation

Division grossière de l'automate : $\{\overline{T} \mid T\}$ où T = états terminaux

Π partition de Q. $P, S \in \Pi$. $P \underset{a}{\Delta} S := \begin{cases} \cdot\ P \xrightarrow{a} S & P \Delta S = P \\ \cdot\ P \xrightarrow{a} \overline{S} & P \Delta S = P \\ \cdot\ \{P_1, P_2\} \xrightarrow{a} S & P \Delta S = \{P_1, P_2\} \end{cases}$

$\Pi \underset{a}{\Delta} S$ généralisé (on applique $P \underset{a}{\Delta} S$ pour chque $P \in \Pi$)

$p \sim q$, $p, q \in \mathcal{P} \in \Pi$

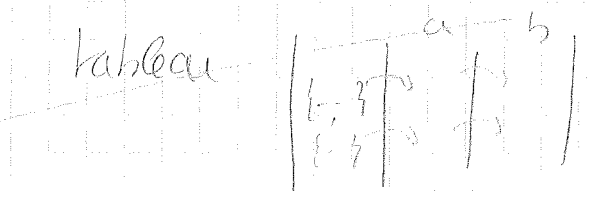
L1. $P \underset{a}{\Delta} S = P \underset{a}{\Delta} \overline{S}$

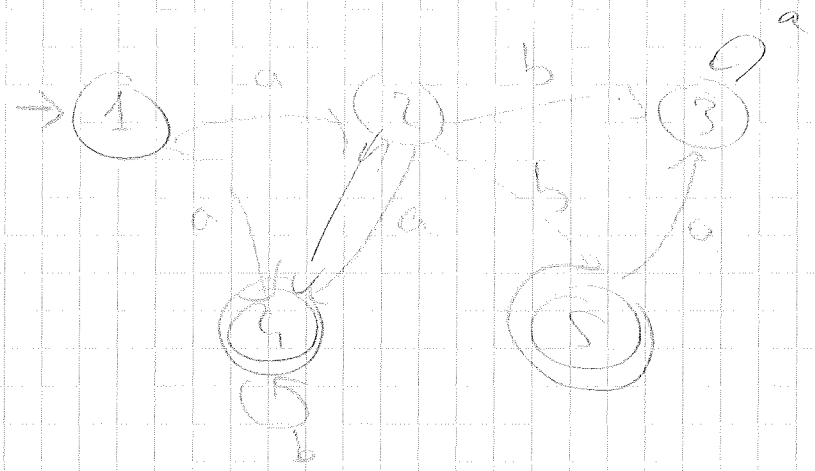
L2. $Q \underset{a}{\Delta} S$ moins fin que $(Q \underset{a}{\Delta} S_1) \underset{a}{\Delta} S_2$ où $S = S_1 \uplus S_2$

HOPCROFT : $\Pi = \{T, \overline{T}\}$
$\hat{T} \leftarrow \min(T, \overline{T})$
$\mathcal{L} = \{\hat{T}\} \times \Sigma$
Tant que $\mathcal{L} \neq \emptyset$
  $(S, a) :: \mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L}$
  Pour chque $P \in \Pi$
    * Si $P \underset{a}{\Delta} S = P$ ✓
    * Sinon $P \underset{a}{\Delta} S = \{P_1, P_2\}$
      - Soit $\exists (P, a) \in \mathcal{L}$. $\mathcal{L}((P,a) \to \{(P_1,a),(P_2,a)\})$
      - Sinon $\mathcal{L} = \{\min(P_1, P_2)\} \times \Sigma \cup \mathcal{L}$

Complexité : $|\Sigma| \times |Q| \times \log |Q|$

Idée : on regarde un nbre de coupe fini, on ajoute que des coupes qu'on n'a pas encore vues, et on en enlève une à chque passage de boucle

Présenta° habituelle : tableau  déterminisa°



$1\,2\,|\,3 \quad | \quad 4\,5 \qquad \sim_0$

$1\,2\,\|_a\,3 \quad | \quad 4\,5 \qquad \sim_1$

$\vdots$