Leçon 116 (16) Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Patrice Coulaut 8/10/16

I] Syntaxe et représentation

1) Définition

Def 1

- P ensemble de variables propositionnelles
- ensemble de connecteurs
  - $\neg$ (non)
  - $\wedge$ (et)
  - $\vee$ (ou)
  - $\Rightarrow$ (implique)
- des parenthèses

$\neg$ est unaire, les autres sont binaires.

Def 2 (formule)

Une formule est formée inductivement comme ceci.

- $p \in P$ est une formules
- Si F, G sont des formules, alors $(F \wedge G), (F \vee G), (F \Rightarrow G)$ sont des formules.

L'ensemble des formules est noté $\mathcal{F}$.

Déf 3 (Hauteur) ← utile ?

La hauteur d'une formule F est défini inductivement :

- $F = p \in P$: $h(F) = 0$
- $F = \neg F'$ $h(F) = 1 + h(F')$
- $F = F' \wedge G$ ou $F' \vee G$ ou $F' \rightarrow G$ $h(F) = 1 + \max(h(F'), h(G))$

2) Quelques propriétés de la structure inductive

Définition 4 (Convention de priorité)

Le symbole $\neg$ a la priorité sur $\wedge$ qui a la priorité sur $\wedge$, qui a lui la priorité sur $\vee$, qui a la priorité sur $\rightarrow$.

Remarque - Exemple 5

Ces conventions permettent d'enlever des parenthèses

$\neg p \wedge q \vee p$ veut dire $((\neg p) \wedge q) \vee p$.

Théorème 6 (Non ambiguité)

Si F est une formule, alors F s'écrit de manière unique sous la forme :

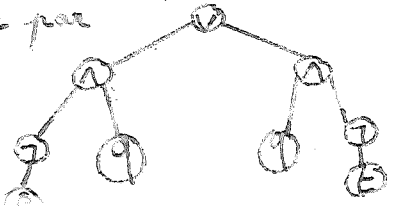
- d'une variable propositionnelle ou
- $F = \neg G$, où $G \in \mathcal{F}$, ou
- $F = (F' \star G)$, où $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$.

DE↑V 1

Définition 7 Représentation en arbre

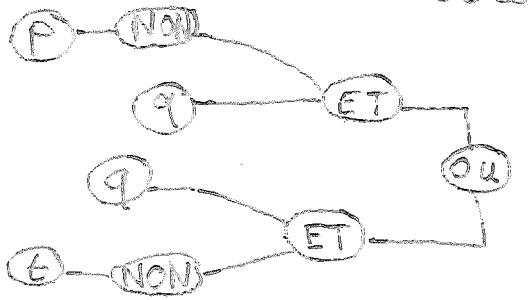
Les feuilles sont les variables propositionnels et les noeuds sont des connecteurs logique.

Exemple 8 : $(\neg p \wedge q) \vee (q \wedge r)$ est représenté par



Proposition 9 (Circuit booleen)

On peut représenter une formule par un circuit booleen



Définition 10 Sous formules

L'ensemble $SF(F)$ des sous formules de F est defini ainsi :

$F = p$, $SF(F) = \{p\}$

$F = \neg F'$, $SF(F) = \{\neg F\} \cup SF(F')$

$F = (F' \wedge G)$ $SF(F) = \{(F' \wedge G)\} \cup SF(F') \cup SF(G)$

Definition 11 Substitution

Soit $F, G \in \mathcal{F}$ et p une variable de F

$F(G/p)$ est la formule où on a remplacé les occurences de p par G.

III Sémantiques

1) Valuations

Definition 12

$v : \mathcal{P} \to \{0 ; 1\}$. v possède une unique prolongement sur $\mathcal{F}$, appelé valuation coherente avec les regles suivantes

$v(\neg F) = 1 - v(F)$

$v((F \vee G)) = v(F) \oplus v(G)$

$v((F \wedge G)) = v(G)\, v(F)$

Exemple 13

$F = (p \wedge q) \vee t$ $\quad v(p) = 1 \quad v(t) = 0$ $\quad v(q) = 1$ alors $v(F) = 1$

2) Satisfiabilité, tautologie, ...

Définition 14

Une formule F est satisfiable ssi $\exists$ valuation tel $v(F) = 1$.

Une tautologie est une formule qui est satisfiable pour tout valuation

F et G sont equivalentes ssi $\forall$ valuation v, $v(F) = v(G)$. On note alors $F \equiv G$

Proposition 15: $\forall F, G, H \in \mathcal{F}$

$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$ commutativité

$((F \wedge G) \wedge H) \equiv (F \wedge (G \wedge H))$ associalité

Proposition 16 (Lois de Morgan)

$\forall F, G \in \mathcal{F}$

$\overline{F \wedge G} \equiv \overline{F} \vee \overline{G}$

$\overline{F \vee G} \equiv \overline{F} \wedge \overline{G}$

Le 5/16 Formules du calcul propositionnel, représentations, formes normales, satisfiabilité.

Fabrice Comlebert 09/04/16

Remarque 17 On peut utiliser une table de vérité pour prouver les preuves précédentes.

III Formes normales et satisfiabilité

1) Formes normales

Définition 19

Un système complet de connecteurs est un ensemble de connecteurs pouvant décrire toutes les formules

Proposition 20 $\{\wedge, \neg\}$ et $\{\vee, \neg\}$ sont des systèmes complets

Proposition 20 $\{\rightarrow\}$ est un système complet de connecteurs

Définition 21

Une clause est une disjonction de variable ou leurs négations

Une formule en forme normales conjonctives si F est un conjonction de clause.

Une formule F est en forme normales disjonctives si F est une disjonction de conjonction de variable ou de leur négation

Théorème de la forme normale 22

$\forall F, \in \mathcal{F}, \exists F'$ tel F' est en FNC
F'' est en FND

et $F \equiv F' \equiv F''$

3) Calcul de Satisfiabilité

Théorème de Cook Levin 23

SAT est NP-complet

Théorème 24

3-SAT est NP-complet) DEV 2

Théorème 25

2SAT est résoluble en temps linéaire) DEV 3

Algorithme 26 Tableaux de Karnaugh

Minimisation de # porte logique dans un circuit.

Complexité ?

Heuristique ou vraiment opt ?