Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

Réf. DNR

Obj : faire le lien entre vrai et prouvable.
Si une formule est prouvable, est-elle vraie ? réciproquement !

I Syntaxe

1) Formules

Def 1 (Langage) Un langage du 1er ordre est la donnée d'une famille de symboles. On a distingue trois sorts.
- les symboles de constante
- les symboles de fonction : on associe à chaque fonction une arité
- les symboles de relation : on associe une arité.

Ex : Th des groupes : $\{e, \cdot, ^{-1}\}$ $\{=\}$

Def 2 (Termes) Définis par induction :
On se donne dans un ensemble V de variables
$T_0 = \{t / t \text{ constante ou variable}\}$
$T_{k+1} = T_k \cup \{f(t_1 \dots t_n) / t_i \in T_k\}$

Ex : $x \cdot e^{-1}$

Def 3 (formules) Les formules atomiques sont de la forme
$R(t_1, \dots, t_n)$ où R est une relation
L'ensemble des formules est donné par :
$F = \text{Atomique} \mid F \vee F \mid F \wedge F \mid F \to F \mid \neg F \mid \exists x F \mid \forall x F$

Ex : $\forall x, x \cdot x^{-1} = e$

Def 4 (Variable libre)
- $VL(R(t_1 \dots t_n)) =$ ensemble des variables de t_i
- $VL(F_1 \odot F_2)$, $\odot \in \{\vee, \wedge, \to\}$ $= VL(F_1) \cup VL(F_2)$
- $VL(\neg F) = VL(F)$
- $VL(Qx F) = VL(F) - \{x\}$ avec $Q \in \{\forall, \exists\}$

Def 5 une formule sans variable libre est dite close

Def 6 (Substitution) Soit F une formule, x une variable et t un terme. $F[x := t]$ est la formule obtenue en remplaçant dans F tous les occurences libres de x par t. Une substitution est libre si les variables libres de t sont bien dans $F[x := t]$

2) Déduction naturelle ← Mentionner qu'il y a d'autres systèmes de preuves

On cherche à démontrer une formule F à partir d'hypothèses d'un ensemble de formules Γ.
On note $\Gamma \vdash F$ si on peut prouver F à partir de Γ.

Axiome : $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}$ ax

$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to_i$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to_e$

$\dfrac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} \exists_i$

(Autre ...)

[...]

(314)

2/3

Déf 7 : (Consistance) Une théorie = un ensemble de formules clos. On dit qu'une théorie est consistante si on ne peut pas déduire $\bot$. C'est-à-dire, on ne peut pas démontrer $T \vdash F$ et $T \vdash \neg F$.

Déf 8 : (Complétude) Une théorie T est complète si elle est consistante, et si pour toute formule F close on a soit $T \vdash F$ soit $T \vdash \neg F$.

Sémantique

Déf 9 (interprétation) Soit $\mathcal{L}$ un langage de la logique du premier ordre. On appelle interprétation de $\mathcal{L}$ un ensemble $\mathcal{M}$ défini par :

- un ensemble non vide $|\mathcal{M}|$, domaine de $\mathcal{M}$
- pour chaque constante c un élément $c_{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}|$
- pour chaque fonction n-aire f une fonction $f_{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \to |\mathcal{M}|$
- pour chaque symbole de relation n-aire R une relation $R_{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \to \{0,1\}$

Déf 10 Soit $\mathcal{M}$ une interprétation de $\mathcal{L}$.
Une valuation dans $\mathcal{M}$ est une fonction de l'ensemble des variables dans $|\mathcal{M}|$.

On note $e[x := a]$ l'environnement e' défini par :
$e'(x) = a$ et $e'(y) = e(y)$ pour $y \neq x$.

Déf 11 (valeur d'un terme) On définit $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(t, e)$ comme étant un élément de l'ensemble $\{0,1\}$ tel que :

1. $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(x, e) = e(x)$
2. $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(f(t_1, \dots, t_n), e) = f_{\mathcal{M}}(\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(t_1, e), \dots, \mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(t_n, e))$ $\in |\mathcal{M}|$
3. $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(\top, e) = 1$ — $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(\bot, e) = 0$
4. $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(F \wedge G, e) = 1$ ssi $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(F, e) = 1$ et $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(G, e) = 1$
5. $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(F \vee G, e) = 1$ ssi $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(F, e) = 1$ ou $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(G, e) = 1$
6. $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(F \to G, e) = \mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(\neg F \vee G, e)$
7. $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(\forall x F, e) = 1$ ssi $\forall a \in |\mathcal{M}|$, $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(F, e[x := a]) = 1$
8. $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(\exists x F, e) = 1$ ssi $\exists a \in |\mathcal{M}|$, $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(F, e[x := a]) = 1$

9. Si F est close, $\mathrm{Val}_{\mathcal{M}}(F, e)$ ne dépend pas de e donc notons simplement $\mathcal{M} \models F$.

Déf 12 (théorie) Soit F une formule. Soit $\mathcal{M}$ une théorie si pour toute interprétation $\mathcal{M}$ on a $\mathcal{M} \models F$.

Déf 13 (contradiction) F est une contradiction ssi aucun modèle ne satisfait F.

Déf 14 (équivalence) Deux formules sont équivalentes si $(F \to G) \wedge (G \to F)$ est une théorie.

9/11

III Formes canoniques

1) Forme prénexe

Def 15 une formule F est prénexe si elle s'écrit de la forme $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ G où $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ et G est sans quantificateurs

Th 16 Soit F une formule. Il existe une formule prénexe équivalente

2) Skolémisation ← dire à quoi ça sert

Def 17 Skolémiser une formule revient à remplacer les variables existentielles par des fonctions dépendant des variables universelles les précédant.

Ex $\forall x \exists y \forall z \exists t \; P(x,y,z,t)$

$\forall x \forall z \; P(x, f_1(x), z, f_2(x,z))$

Th 18 Soit F une formule close prénexe. F admet un modèle ssi F_S admet un modèle

IV Lien entre syntaxe et sémantique

Th 19 Soit T une théorie

T est contradictoire ssi $T \vdash \bot$

Soit T une théorie complète, M_1, M_2 deux modèles d'une formule close.

$M_1 \equiv F$ ssi $M_2 \equiv F$

Théorème de complétude Soit T théorie et F close

$T \models F$ ssi $T \vdash F$

V Théorèmes de compacité

Th 21 T théorie.

T admet un modèle fini de T qui est contradictoire ssi toutes ses sous-parties finies de T sont non contradictoires.

Th 22 Si T a des modèles arbitrairement grands alors T a un modèle infini

Th 23 Si T a un modèle infini, il a un modèle non dénombrable

Th 24 (Löwenheim-Skolem) Soit T une théorie sur un langage au plus dénombrable, T a un modèle infini alors T possède un modèle dénombrable.

Appl : "être un modèle fini" non axiomatisable

"modèle fini" non plus.

VI Décidabilité

Def 25 Une partie est décidable si il existe un algo qui la résout.

Def 26 Une théorie est récursive si on peut décider si F est une formule de T.

Def 27 T est décidable si on peut faire "exactement" ce qu'on peut faire avec T et F.

Th 28 Presburger indécidable

Th 29 Une théorie complète récursive est un langage au plus dénombrable est décidable

Th 30 Peano n'est pas complète

=> Modèle pas forcément formel (ex Rétro ou la théorie des ordres) difficile de prouver de choses sur un autre (ex théorie des ensembles)

Ajouter un peu contexte

formule prénexe

aussi avant très pratique pour parler des aspects > 0.

12

13