NOM : PINAULT Prénom : Laurelive Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exple 2

Autre sujet : 918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exple

I. Théories et modèles en logique du 1er ordre.

1 Théories : aspect syntaxique

Def 1. Un langage (du premier ordre) est la donnée de symboles de fonctions et de symboles de relations, chacun associé avec une arité. On note $\mathcal{L} = \mathcal{G} \sqcup \mathcal{R}$.

Rq 2. Les fonctions d'arité 0 sont appelés constantes.

Exple 3.
- $\mathcal{L}_{groupe} = \{\underset{\text{cste}}{e}, \underbrace{*, {}^{-1}}_{\text{fonctions}}, \underset{\text{relation}}{=}\}$
- $\mathcal{L}_{ensemble} = \{\underset{\text{cste}}{\emptyset}, \underbrace{\cap, \cup, {}^{c}}_{\text{fonctions}}; \underbrace{=, \in, \subset}_{\text{relations}}\}$

Def 4. L'ensemble des termes sur un langage est le plus petit ensemble contenant les variables, les constantes et stable par application des symboles de fonction. On note $\mathcal{T}(\mathcal{L})$ ou simplement $\mathcal{T}$.

Exple 5.
- $x * y^{-1}$ et $e * (x * y^{-1})^{-1} \in \mathcal{T}(\mathcal{L}_{groupe})$.
- $(x \cup y)^c \cap \emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{L}_{ensemble})$.

Def 6.
- L'ensemble des formules atomiques d'un langage est $Atom(\mathcal{L}) = \{R(t_1, \dots, t_k),\ R \in \mathcal{R}$ d'arité k et $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}(\mathcal{L})\}$.
- L'ensemble des formules en logique du premier ordre est décrit par :

$\mathcal{F}(\mathcal{L}) = Atom(\mathcal{L}) \mid F_1 \vee F_2 \mid F_1 \wedge F_2 \mid F_1 \to F_2 \mid \neg F \mid \exists x F \mid \forall x F$

où $F, F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ et x est une variable.

Def 7. Si F est une formule on définit ses variables libres :

$VL(F) =$
- l'ensemble des variable apparaissant dans les t_i si $F = R(t_1 \dots t_k)$
- $VL(F_1) \cup VL(F_2)$ si $F = F_1 \oplus F_2$ $(\oplus \in \{\vee, \wedge, \to\})$
- $VL(F')$ si $F = \neg F'$
- $VL(F') \setminus \{x\}$ si $F = Qx F'$ (où $Q \in \{\exists, \forall\}$).

Def 8. Une formule F est dite close si $VL(F) = \emptyset$

Exple 9.
- $\forall x\, (x * e = e) \in \mathcal{F}(\mathcal{L}_{groupe})$ et est close
- $\forall y\, (x * y^{-1} = y * e^{-1}) \in \mathcal{F}(\mathcal{L}_{groupe})$ et $VL(F) = \{x\}$

Cas particulier 10. Si tous les symboles de relations du langage sont d'arité 0, alors les quantificateurs sont inutiles : on est dans le cas du calcul propositionnel.

Exple 11. $(X \to Y \vee Z) \wedge (X \to \bot)$ et $(X \vee Y) \to \neg(\neg X \wedge \neg Y)$ sont des formules du calcul propositionnel.

Def 12. Une théorie est un ensemble (fini ou infini) de formules closes. Les éléments de la théorie sont appelés les axiomes.

Exple 13. La théorie des groupes sur $\mathcal{L}_{groupe}$ est

$\forall x, y, z\, ((x * y) * z = x * (y * z))$ (Ass)

$\forall x\, (x * e = x \wedge e * x = x)$ (Neutre)

$\forall x\, (x * x^{-1} = e \wedge x^{-1} * x = e)$ (Inv) }

Def 14. Un système formel de preuve est la donnée d'un ensemble de règles. Il définit une notion de prouvabilité.

Exple 15. Les règles de la déduction naturelle sont données en annexe. Dans la suite on considérera cette notion de prouvabilité.

Rq 16. On aurait pu donner d'autres systèmes équivalents.

Def 17 On dit qu'une formule F est prouvable dans une théorie $\mathcal{T}$ et on note $\mathcal{T} \vdash F$ si $\exists\, \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ fini tel que $\mathcal{T}' \vdash F$ soit déductible en utilisant un nombre fini de règles.

Exple 18 On peut prouver la formule du calcul propositionnel :
$\neg A \leftrightarrow (A \to \bot)$

Def 19 On dit que $\mathcal{T}$ est consistante si $\mathcal{T} \nvdash \bot$

Def 20 On dit que $\mathcal{T}$ est complète si $\forall F$ formule close $\mathcal{T} \vdash F$ ou $\mathcal{T} \vdash \neg F$

Prop 21 Si $\mathcal{T}$ est complète alors :
- $\forall A, B$ closes, $\mathcal{T} \vdash A \vee B$ ssi $\mathcal{T} \vdash A$ ou $\mathcal{T} \vdash B$
- $\forall A$ close $\mathcal{T} \vdash \neg A$ ssi $\mathcal{T} \nvdash A$.

[2] Modèles : aspect sémantique

Def 22 Soit $\mathcal{L}$ un langage. On appelle interprétation de $\mathcal{L}$ la donnée de $\mathcal{I}$:
- un ensemble non vide $|\mathcal{I}|$
- pour chaque symbole de constante un élément de $|\mathcal{I}|$
- pour chaque symbole de fonction d'arité k une fonction $|\mathcal{I}|^k \to |\mathcal{I}|$
- pour chaque symbole de relation d'arité k un sous ensemble de $|\mathcal{I}|^k$

Exple 23 • $(\mathbb{Z}, 0, +, -, =)$ est une interprétation de $\mathcal{L}$ groupe
• $(\mathbb{N}, 3, \times, id, 1)$ en est une autre

Def 24 • Si $\mathcal{I}$ est une interprétation de $\mathcal{L}$, un environnement e est une fonction des variables dans $|\mathcal{I}|$.
• La valeur d'un terme dans un environnement est définie par récurrence sur t.
• De même la valeur d'une formule dans un environnement est définie par récurrence. Pour une formule close, ça ne dépend pas de l'environnement

Def 25 Une interprétation est un modèle d'une théorie si toutes les formules de la théorie ont pour valeur 1 dans l'interprétation. On note $\mathcal{I} \models \mathcal{T}$

Exple 26 $(\mathbb{Z}, 0, +, -, =)$ est un modèle de Groupe mais $(\mathbb{N}, 3, \times, id, 1)$ n'en est pas un.

Cas particulier 27 Dans le cas du calcul propositionnel, une distribution de valeur de vérité (dvv) est une fonction de l'ensemble des variables propositionnel dans $\{0,1\}$. Une tautologie est une formule F telle que $\forall d$ dvv, $d(F) = 1$.

Def 28 Une théorie $\mathcal{T}$ est contradictoire s'il n'existe pas de modèle de $\mathcal{T}$

Def 29 Une formule close F est valide dans $\mathcal{T}$ (on note $\mathcal{T} \models F$) si pour tout modèle $\mathcal{I}$ de $\mathcal{T}$, $\mathcal{I} \models F$ (ie dans $\mathcal{I}$ $val(F) = 1$).

[3] Lien entre syntaxe et sémantique

Thm 30 (Complétude) • $\mathcal{T}$ est consistante ssi $\mathcal{T}$ est non contradictoire
• $\forall F$ close, $\mathcal{T} \vdash F$ ssi $\mathcal{T} \models F$

Cas particulier 31 Théorème de complétude du calcul propositionnel] DVT 1

Thm 32 (compacité) $\mathcal{T}$ admet un modèle ssi $\forall$ ss ensemble fini de $\mathcal{T}$ admet un modèle.

Cor 33 $\mathcal{T}$ a des modèles finis de cardinal arbitrairement grand $\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ a un modèle infini

[4] Décidabilité d'une théorie

Def 34 Une théorie est récursive (resp décidable) si $\forall F$ close, "$F \in \mathcal{T}$" (resp "$\mathcal{T} \vdash F$") est décidable.

II. Quelques exemples de théories

1. Des théories algébriques

Exple 35 La théorie des groupes.

Exple 36 La théorie des anneaux

Exple 37 La théorie des espaces vectoriels

2. L'arithmétique

Exple 38 L'arithmétique de Peano. $\mathcal{L}(0, S, +, \times)$
Contient les axiomes de l'arithmétique élémentaire et la récursion.

Prop 39. L'arithmétique de Peano est indécidable.

Exple 40. L'arithmétique de Presburger est la théorie de l'arithmétique avec uniquement l'addition

DVT 2

Prop 41. L'arithmétique de Presburger est décidable.

3. La théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel

Exple 42 La théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel

III. Limites de la logique du premier ordre

Exple 43 On ne peut pas exprimer la théorie des anneaux principaux → voir Logique d'ordre supérieur

Exple 44 Les espaces vectoriels sont difficilement théorisables → voir Logiques multi-sortes.

Exple 45 On ne peut pas théoriser complètement $\mathbb{N}$: il y aura forcément un modèle indénombrable.

Annexe : Règles de la déduction naturelle

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ ax \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ aff$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \to e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge e_g \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge e_d$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee i_g \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee i_d \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \vee e$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg i \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg e \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot c$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \notin VL(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x A}\ \forall i \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ \forall e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A}\ \exists i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C \quad x \notin VL(\Gamma) \quad x \notin VL(C)}{\Gamma \vdash C}\ \exists e$$