Systèmes d'équations linéaires : opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

162

$\mathbb{K}$ est un corps.

I- Généralités

1) Définitions et différentes expressions

Considérons un système linéaire de p équations en n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \qquad (a_{ij}) \in \mathbb{K}, \ (b_i) \in \mathbb{K}.$$

Déf 1 On appelle **solution** tout vecteur $x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ dont les composantes x_i satisfont toutes les équations. Le système est dit **compatible** s'il admet au moins une solution.

Ex 2 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ compatible ; $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ pas compatible

Expression matricielle

$A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

Déf 3 On appelle **rang du système** le rang de A.

NB 4 Si $b = 0_{\mathbb{K}^p}$, on dit que le système est **homogène**

Expression vectorielle

Notons $c_1, \dots, c_n$ les vecteurs colonnes de A. On a

$$(1) \iff x_1c_1 + \dots + x_nc_n = b$$

Résoudre le système revient donc à déterminer les coefficients de la décomposition du vecteur $b \in \mathbb{K}^p$. Le système est donc compatible ssi $b \in \mathrm{Vect}(c_1,\dots,c_n)$

2) Systèmes de Cramer

Déf 5 On appelle **système de Cramer** un système linéaire dont la matrice est carrée et inversible. On aura $AX = b \iff X = A^{-1}b$ (2).

Prop 6 Un système de Cramer admet toujours une unique solution donnée par (2).

Théo 7 Un système de Cramer admet toujours une unique solution pour tout $b \in \mathbb{K}^n$ dont la formule explicite est, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

$$x_i = \frac{\det(C_1 | \dots | C_{i-1} | b | C_{i+1} | \dots | C_n)}{\det A}.$$

3) Cas général

Théo 8 (Raché Fontené) Soit

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + \dots + a_{rn}x_n = b_r \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pr}x_r + \dots + a_{pn}x_n = b_n \end{cases}$$

un système de p équations en n inconnues de rang r. On extrait du système un mineur δ d'ordre r non nul. On peut supposer

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

i) Le système est compatible ssi tous les déterminants caractéristiques associés non nuls.

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix} \qquad s \in [\![r+1, n]\!].$$

ii) Si cette condition est réalisée, le système est équivalent au système des équations principales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Il admet une infinité de solutions dépendantes de n-r paramètres. Les solutions se calculent en résolvant le système de Cramer obtenu en donnant aux variables $x_{r+1}, \dots, x_n$ des valeurs arbitraires.

Théo 9 L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Si le système sous forme échelonnée comporte k équations, l'espace de solutions est de dimension n-k.