Théorème de d'Alembert-Gauss:

Réf: Rombaldi P379

Énoncé: $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Théorème: Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Alors: 1) $\lim_{|z| \to +\infty} (|P(z)|) = +\infty$

2) Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$

3) z_0 est racine de P.

Étapes:

(E1) Montrer l'existence de l'inf

(E2) Mq l'inf est racine du polynôme avec

$P(z_0 + z) = Q(z) = P(z_0) + b_p z^p (1 + \varphi(z))$

Mq $P(z_0) = 0$

(E1) Mq $\exists z_0 \in \mathbb{C} \quad |P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} (|P(z)|)$.

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ unitaire, $n \geq 1$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^n \Big(1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}}_{\xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0} \Big) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 1$$

Donc $|P(z)| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\exists R \in \mathbb{R}$ tq $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| > R, \quad |P(z)| \geq |P(0)|$

Ainsi, P est continue sur $\overline{B(0;R)}$ qui est compacte donc elle est bornée et atteint ses bornes et en particulier,

$\exists z_0 \in \overline{B(0;R)}$ telle que $|P(z_0)| = \inf_{z\in B(0;R)} (|P(z)|)$

Ainsi $|P(z_0)| = \inf_{z\in B(0;R)} (|P(z)|)$

(E2) Mq $P(z_0) = 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, $P(z_0 + z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_0^{k-j} z^j \right)$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j} \right) z^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} b_j z^j = Q(z) \text{ avec } b_n = 1$$

$Q(0) = P(z_0) = b_0$

Donc $\forall z \in \mathbb{C}, \quad Q(z) = P(z_0) + \sum_{j=1}^{n} b_j z^j$

on note $p = \inf \{ 1 \leq i \leq n \mid b_i \neq 0 \}$

On a alors $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$Q(z) = P(z_0) + b_p z^p + b_{p+1} z^{p+1} + \dots + z^n$$

$$= P(z_0) + b_p z^p \underbrace{\left(1 + \frac{b_{p+1}}{b_p} z + \dots + \frac{1}{b_p} z^{n-p}\right)}_{= \varphi(z) \xrightarrow[|z| \to 0]{} 0}$$

$$= P(z_0) + b_p z^p (1 + \varphi(z))$$

Soit ω une racine p-ième de $-b_p$ et u une racine p-ième de $P(z_0)$. On pose $z(t) = \frac{ut}{\omega}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $Q(z(t)) = P(z_0) + b_p \frac{u^p t^p}{\omega^p} (1 + \varphi(z(t)))$

$$= P(z_0) - P(z_0) t^p (1 + \varphi(z(t)))$$

$$= P(z_0)(1 - t^p (1 + \varphi(z(t))))$$

Comme $|z(t)| \xrightarrow[t \to]{} 0$, $\varphi(z(t)) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

Donc $\exists r > 0 \ \forall t \in]-r; r[, |\varphi(z(t))| \leq \frac{1}{2}$

On choisit alors $r' = \min(r; 1)$ et on a

$\forall t \in]0; r'[$, $1 - t^p \geq 0$ et $|t^p \varphi(z(t))| = t^p |\varphi(z(t))| \leq \frac{t^p}{2}$

donc $\forall t \in]0; r'[, |Q(z(t))| \leq |P(z_0)| (1 - t^p + \frac{t^p}{2})$

$\forall t \in]0; r'[, |Q(z(t))| \leq |P(z_0)| (1 - \frac{t^p}{2})$

Or $\forall t \in]0; r'[, |P(z_0)| \leq |Q(z(t))| \leq |P(z_0)| (1 - \frac{t^p}{2})$

donc $\forall t \in]0; r'[\ |P(z_0)| \frac{t^p}{2} \leq 0$ donc $|P(z_0)| = 0$.

Compléments :

(+) <u>les polynômes sont des fonctions continues</u> :

id : $x \longrightarrow x$ est continue

▷ le produit de f et g continues est continu :

$(fg)(x) = f(x)g(x)$

Par caractérisation séq. de la limite

$f(x_n) \to f(a)$ $g(x_n) \to g(a)$

$(fg)(x_n) \to (fg)(a)$

et la somme aussi → Polynômes ok

(+) Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. L'image de f est également compacte donc bornée. Mq elle atteint ses bornes:

Soit $\{ f(x) \mid x \in E \}$ soit $S = \sup (\|f(x)\| ; x \in E)$.

On construit une suite telle que $\|f(x_n)\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S$

Mq $(x_n)_{n \geq 0}$ converge dans F.

$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement ↗ tq $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge

Donc $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x \in E$

Par continuité de f, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} f(x) \in F$