Lemme de la grenouille et applications.

[GOU] p46 + [X-ENS1] p86

Recasages : 204, 203, 226, 223

Lemme (de la grenouille) :
(E, d) un esp. métrique compact.
Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite dans E tq $d(u_{n+1}, u_n) \to 0$
Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n) est connexe

Preuve :

Soit Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

Supposons Γ non connexe.

$\exists$ ouvert A, B fermés disjoints non vides tels que $\Gamma = A \cup B$.

Dessin à faire en parallèle en fin de feuille

A et B sont compacts car ce sont des fermés de E compact.

$\exists$ donc $\alpha > 0$ tels que $\alpha := d(A, B)$.

On pose alors :

$$A' = \{x \in E / d(x, A) < \alpha/3\} \quad \text{et} \quad B' = \{x \in E / d(x, B) < \alpha/3\}.$$

On pose enfin $K = E \setminus (A' \cup B')$.

K est fermé comme complémentaire d'un ouvert de E. Donc K est compact.

A présent, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $d(u_n, u_{n+1}) < \alpha/3$.

Soit $N_0 \geq N$ quelconque.

Soit $a \in A$, il existe $k \geq N_0$ tel que $d(u_k, A) < \alpha/3$, i.e. : $u_k \in A'$

Soit $b \in B$, il existe $k \geq l$ tel que $d(u_k, B) < \alpha/3$, i.e. : $u_k \in B'$

Prenons n_0 le premier entier plus grand que l tel que $u_{n_0} \notin A'$. Un tel entier existe car $u_k \notin A'$.

On a alors $u_{n_0} \notin A'$ et $u_{n_0 - 1} \in A'$.

Alors, $d(u_{n_0}, B) \geq d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0}, u_{n_0-1})$
$\geq d(A, B) - d(u_{n_0-1}, A) - d(u_{n_0}, u_{n_0-1}) \geq \alpha/3$.
α ; $< \alpha/3$; $< \alpha/3$

Donc $u_{n_0} \notin B'$, donc $u_{n_0} \in K$.

On a montré pour $N_0 \geq N$ quelconque, il existe $n_0 \geq N$ tq $u_{n_0} \in K$.

De cette façon, on peut extraire $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de (u_n) à valeurs dans K compact.

Soit donc, $(u_{\varphi(n)})$ admet une valeur d'adhérence dans K.

Par suite, (u_n) admet une valeur d'adhérence dans K.

Ce qui est absurde car $\Gamma^1 \cap K = \emptyset$. D'où Γ^1 connexe. □

Application :

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[0,1]$ telle que $\forall n,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Alors $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, $d(u_{n+1}, u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Preuve :

Le sens direct est clair.

Supposons $d(u_{n+1}, u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Il suffit de montrer que (u_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Supposons donc, en vue d'une contradiction que (u_n) admette au moins deux valeurs d'adhérence α et β.

Par le lemme précédent, Γ^1 est connexe dans $\mathbb{R}$, donc il s'agit d'un segment contenant $[\alpha, \beta]$.

C'est plutôt tout élément de Γ^1...

Montrons que tout élément de $[\alpha, \beta]$ est un point fixe de f.

Soit $\ell \in [\alpha, \beta]$. Il existe φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Alors alors $u_{\varphi(n)+1} = f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$

Et puisque $u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \to 0$, on a $f(\ell) = \ell$.

En particulier, puisque $\frac{\alpha+\beta}{2}$ est une valeur d'adhérence, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [\alpha, \beta]$.

Alors alors à partir de n_0, la suite est stationnaire, donc convergente donc n'admet qu'une valeur d'adhérence u_{n_0}, ce qui est absurde.

D'où $(u_n)_n$ converge car Γ^1 ne contient qu'un élément.

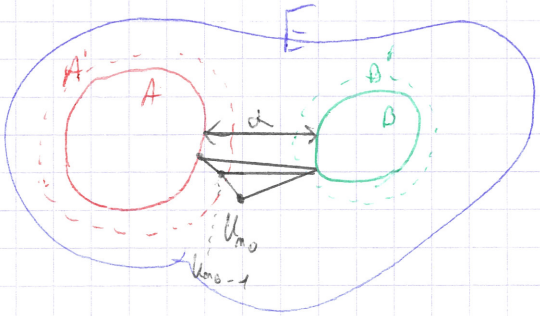

Schéma du lemme de la grenouille.